Проблемы физики, математики и техники, № 1 (18), 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

О РЕШЕНИЯХ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ НЕАВТОНОМНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С КВАДРАТИЧНОЙ ПО ФАЗОВЫМ ПЕРЕМЕННЫМ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Е.В. Вареникова

Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского, Новозыбков, Россия

ON SOLUTIONS OF THE TWO-POINT BOUNDARY PROBLEM FOR ONE NON-AUTONOMOUS DIFFERENTIAL SYSTEM WITH A QUADRATIC AT PHASE VARIABLES RIGHT-HAND SIDE

E.V. Varenikova

I.G. Petrovski Briansk State University, Novozybkov, Russia

В работе рассматривается система вида $\dot{x} = ax + by + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$, $\dot{y} = -bx + ay + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2$, где $a_{ij} = a_{ij}(t)$, $b_{ij} = b_{ij}(t)$ – непрерывные функции; *a* и *b* – постоянные. Для нее установлены условия, при которых эта система имеет линейную отражающую функцию Мироненко и, значит, линейное отображение за период $[-\omega;\omega]$. Полученные условия позволяют указать начальные данные решений двухточечной краевой задачи $\Phi\big(x(\omega), y(\omega), x(-\omega), y(-\omega)\big) = 0$ и, значит, начальные данные 2ω-периодических решений рассматриваемой системы в том случае, когда ее коэффициенты 2ω-периодические непрерывные функции.

***Ключевые слова**: отражающая функция Мироненко, отображение за период, краевая задача, периодические решения.*

In the paper we consider the system $\dot{x} = ax + by + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$, $\dot{y} = -bx + ay + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2$, where $a_{ij} = a_{ij}(t)$, $b_{ij} = b_{ij}(t)$ are the continued functions; *a* and *b* are the constants. For this system we established conditions under which this system has a linear Mironenko reflecting function and therefore a linear mapping in period $[-\omega;\omega]$. The obtained conditions allow us point out the initial data of the solutions of the two-point boundary task $\Phi\big(x(\omega), y(\omega), x(-\omega), y(-\omega)\big) = 0$ and therefore, the initial data of the 2ω-periodic solutions of the system (1) in the case when its coefficients are 2ω periodic continued functions.

***Keywords**: reflective function Mironenko, in-period transformation, boundary problem, periodic solutions.*

Введение

Исследование многомерных дифференциальных систем связано со значительными математическими трудностями. Начало их систематическому исследованию положили А.Пуанкаре и А.М.Ляпунов. Их методы до сих пор являются основными при качественном исследовании систем дифференциальных уравнений. Применение этих методов в каждом конкретном случае наталкивается на огромные трудности. Это вынуждает исследователей искать другие пути, облегчающие работу по изучению свойств решений дифференциальных систем.

Два десятилетия назад Мироненко В.И. предложил новый метод – метод отражающей функции. С его помощью удается находить начальные данные периодических решений периодических дифференциальных систем и исследовать эти решения на устойчивость. Конкретные примеры такого исследования можно найти как в [1] так и в [2], а также в работах других исследователей. Это прежде всего работы [3]–[9], а также работы [10]–[11], в которых предложен новый подход к использованию понятия отражающей функции.

1 Основные положения теории отражающей функции

Приведем здесь основные положения теории отражающей функции необходимые для понимания дальнейшего изложения.

Для каждой дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x),\quad t \in R,\quad x \in D \subset R^n, \qquad (1.1)$$

удовлетворяющей условиям теоремы существования и единственности с общим решением в форме Коши $\varphi(t;t_0,x_0)$ отражающая функция $F(t,x)$ определяется формулой $F(t,x) := \varphi(-t;t,x)$. Такое определение позволяет сразу заметить, что в том случае, когда система (1.1) 2ω-периодична, отображение $x \mapsto F(-\omega,x)$ является отображением А. Пуанкаре (отображением за период $[-\omega;\omega]$).

Функция $F(t,x)$ является отражающей функцией системы (1.1) тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}X(t,x)+X(-t,F)=0,$$

$$F(0,x)\equiv x. \qquad (1.2)$$

Основные применения отражающей функции основаны на том, что эта функция по состоянию системы $x(t)$ позволяет найти состояние $x(-t)\equiv F(t,x(t))$. Это свойство позволяет при известной отражающей функции $F(t,x)$ находить начальные данные краевой задачи $\Phi\big(x(\omega),x(-\omega)\big)=0$ из конечного уравнения $\Phi\big(x(\omega),F(\omega,x(\omega))\big)=0$, а значит находить и начальные данные 2ω-периодических решений и определять характер их устойчивости (подробнее см. по этому поводу [1]) для 2ω-периодических систем (1.1).

2 Отражающая функция квадратичной системы

В работе рассматривается система вида

$$\begin{aligned}\dot x&=ax+by+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2,\\ \dot y&=-bx+ay+b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2,\end{aligned} \qquad (2.1)$$

где $a_{ij}=a_{ij}(t),\ \ b_{ij}=b_{ij}(t)$ – непрерывные функции; a и b – постоянные.

Используя основное соотношение для отражающей функции (1.2) для системы (2.1) установлены условия

$$\begin{aligned}
&a_{20}\cos 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau-b_{20}\sin 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau+\\
&+\overline{a}_{20}\cos^2 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau+\overline{a}_{11}\tfrac{1}{2}\sin 4\int_0^t b_ч(\tau)d\tau+\\
&+\overline{a}_{02}\sin^2 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau=0,\\
&a_{11}\cos 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau-b_{11}\sin 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau-\\
&-\overline{a}_{20}\sin 4\int_0^t b_ч(\tau)d\tau+\overline{a}_{11}\cos 4\int_0^t b_ч(\tau)d\tau+\\
&+\overline{a}_{02}\sin 4\int_0^t b_ч(\tau)d\tau=0,\\
&a_{02}\cos 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau-b_{02}\sin 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau+\\
&+\overline{a}_{20}\sin^2 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau-\overline{a}_{11}\tfrac{1}{2}\sin 4\int_0^t b_ч(\tau)d\tau+\\
&+\overline{a}_{02}\cos^2 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau=0,\\
&a_{20}\sin 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau+b_{20}\cos 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau+\\
&+\overline{b}_{20}\cos^2 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau+\overline{b}_{11}\tfrac{1}{2}\sin 4\int_0^t b_ч(\tau)d\tau+\\
&+\overline{b}_{02}\sin^2 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau=0,\\
&a_{11}\sin 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau+b_{11}\cos 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau-\\
&-\overline{b}_{20}\sin 4\int_0^t b_ч(\tau)d\tau+\overline{b}_{11}\cos 4\int_0^t b_ч(\tau)d\tau+\\
&+\overline{b}_{02}\sin 4\int_0^t b_ч(\tau)d\tau=0,\\
&a_{02}\sin 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau+b_{02}\cos 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau+\\
&+\overline{b}_{20}\sin^2 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau-\overline{b}_{11}\tfrac{1}{2}\sin 4\int_0^t b_ч(\tau)d\tau+\\
&+\overline{b}_{02}\cos^2 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau=0,
\end{aligned} \qquad (2.2)$$

при которых эта система имеет такую же отражающую функцию, что и линейная система

$$\dot x=ax+by,$$
$$\dot y=-bx+ay,$$

и, значит, линейное отображение за период $\big[-\omega;\omega\big]$.

Полученные условия позволяют указать начальные данные решений двухточечной краевой задачи $\Phi\big(x(\omega),y(\omega),x(-\omega),y(-\omega)\big)=0$ и, значит, начальные данные 2ω-периодических решений рассматриваемой системы в том случае, когда ее коэффициенты 2ω-периодические непрерывные функции.

***Теорема* 2.1.** *Пусть для системы* (2.1) *с непрерывными коэффициентами выполнены условия* (2.2). *Тогда для краевой задачи* (2.1) *и*

$$\begin{aligned}a_1x(\omega)+a_2y(\omega)+a_3x(-\omega)+a_4y(-\omega)=c_1,\\ b_1x(\omega)+b_2y(\omega)+b_3x(-\omega)+b_4y(-\omega)=c_2,\end{aligned} \qquad (2.3)$$

верны следующие положения:

1. *Если число*

$$\begin{aligned}D:=&(a_1b_2+a_3b_4-a_2b_1-a_4b_3)+\\ &+(a_3b_1+a_4b_3-a_1b_3-a_2b_4)\times\\ &\times e^{-2\int_0^\omega a_ч(\tau)d\tau}\sin 2\int_0^\omega b_ч(\tau)d\tau+\\ &+(a_1b_4+a_3b_2-a_2b_3-a_4b_1)\times\\ &\times e^{-2\int_0^\omega a_ч(\tau)d\tau}\cos 2\int_0^\omega b_ч(\tau)d\tau\neq 0,\end{aligned}$$

то краевая задача (2.3) *имеет единственное решение, начинающееся при* $t=\omega$ *в точке* $\big(x(\omega),y(\omega)\big)$, *удовлетворяющей системе алгебраических уравнений*

$$\begin{aligned}M\cdot x(\omega)+N\cdot y(\omega)=c_1,\\ P\cdot x(\omega)+Q\cdot y(\omega)=c_2,\end{aligned} \qquad (2.4)$$

где числа

$$M := a_1 + a_3 e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \cos 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau + $$

$$+a_4 e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \sin 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau,$$

$$N := a_2 - a_3 e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \sin 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau + $$

$$+a_4 e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \cos 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau,$$

$$P := b_1 + b_3 e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \cos 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau + $$

$$+b_4 e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \sin 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau,$$

$$Q := b_2 - b_3 e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \sin 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau + $$

$$+b_4 e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \cos 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau$$

(*если только это решение продолжимо на* $[-\omega, \omega]$). *Если же это решение не продолжимо на* $[-\omega, \omega]$, *то задача* (2.3) *для системы* (2.1) *решений не имеет*).

2. *Если число* $D = 0$ *и*

$$\frac{P}{M} = \frac{Q}{N} \neq \frac{c_2}{c_1}, \tag{2.5}$$

то краевая задача (2.3) *не имеет решений.*

3. *если число* $D = 0$ *и*

$$\frac{P}{M} = \frac{Q}{N} = \frac{c_2}{c_1} \tag{2.6}$$

то краевая задача (2.3) *имеет бесконечно много решений, причем при* $t = \omega$ *множество начальных данных* $(x(\omega), y(\omega))$ *этих решений находится на прямой*

$$M \cdot x(\omega) + N \cdot y(\omega) = c_1.$$

4. Если $M = N = P = Q = c_1 = c_2 = 0$, *то краевая задача* (2.3) *имеет своими решениями все решения системы* (2.1) *продолжимые на* $[-\omega, \omega]$.

Доказательство. Ранее было доказано [12], что продолжимое на $[-\omega; \omega]$ решение $(x(t), y(t))$ системы (2.1) будет удовлетворять условию

$$\Phi\big(x(\omega), y(\omega), x(-\omega), y(-\omega)\big) = 0$$

тогда и только тогда, когда начальная точка $(x(\omega), y(\omega))$ этого решения удовлетворяет условию

$$\Phi\big(x(\omega), y(\omega), F_1(\omega, x(\omega), y(\omega)),$$

$$F_2(\omega, x(\omega), y(\omega))\big) = 0.$$

В нашем случае F_1 и F_2 определяются соотношениями

$$F(t, x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} F_1(t, x(t), y(t)) \\ F_2(t, x(t), y(t)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2\int_0^{t} a_ч(\tau)d\tau} \left(x \cos 2\int_0^{t} b_ч(\tau)d\tau - y \sin 2\int_0^{t} b_ч(\tau)d\tau \right) \\ e^{-2\int_0^{t} a_ч(\tau)d\tau} \left(x \sin 2\int_0^{t} b_ч(\tau)d\tau + y \cos 2\int_0^{t} b_ч(\tau)d\tau) \right) \end{pmatrix}.$$

Поэтому предыдущее условие примет вид

$$\Phi\Bigg(x(\omega), y(\omega), e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \Bigg(x(\omega) \cos 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau -$$

$$- y(\omega) \sin 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau) \Bigg)$$

$$e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \Bigg(x(\omega) \sin 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau +$$

$$+ y(\omega) \cos 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau \Bigg)\Bigg) = 0.$$

Учтем теперь, что в нашем случае функция Φ определяется соотношениями (2.3). Поэтому решение $(x(t), y(t))$ будет удовлетворять нужным краевым условиям тогда и только тогда, когда $x(\omega), y(\omega)$ удовлетворяют системе (2.4).

Запишем ее в виде:

$$A\begin{pmatrix} x(\omega) \\ y(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

где $A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$,

Найдём определитель матрицы A:

$$\det A = M \cdot Q - N \cdot P =$$

$$= \Bigg(a_1 + a_3 e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \cos 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau +$$

$$+a_4 e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \sin 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau \Bigg) \times$$

$$\times \Bigg(b_2 - b_3 e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \sin 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau +$$

$$+b_4 e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \cos 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau \Bigg) -$$

$$- \Bigg(a_2 - a_3 e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \sin 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau +$$

$$+a_4 e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \cos 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau \Bigg) \times$$

$$\times \left(b_1 + b_3 e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \cos 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau + \right.$$

$$\left. +b_4 e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \sin 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau \right).$$

Выполнив элементарные преобразования, получим

$$\det A = (a_1b_2 + a_3b_4 - a_2b_1 - a_4b_3) +$$

$$+(a_3b_1 + a_4b_3 - a_1b_3 - a_2b_4)e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \sin 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau +$$

$$+(a_1b_4 + a_3b_2 - a_2b_3 - a_4b_1)e^{-2\int_0^{\omega} a_ч(\tau)d\tau} \cos 2\int_0^{\omega} b_ч(\tau)d\tau.$$

Так как $D := \det A,$ то система (2.4) будет иметь единственное решение если $D \neq 0.$ Если же $D = 0,$ то при выполнении условий (2.5) система не имеет решений, а при выполнении условий (2.6) существует бесконечное множество решений. В случае, когда $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $c_1 = c_2 = 0,$ система (2.3) вырождается в тождество.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск : изд-во «Университетское», 1986. – 76 с.

2. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель : УО «ГГУ» им. Ф Скорины», 2004. – 196 с.

3. *Musafirov*, *E.V.* Differential systems, the mapping over period for which is represented by a product of three exponential matrixes / E.V. Musafirov // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2007. – Vol. 329. – P. 647–654.

4. *Musafirov*, *E.V.* Reflecting function and periodic solutions of differential systems with small parameter / E.V. Musafirov // Indian Journal of Mathematics. – 2008. – Vol. 50, № 1. – P. 63–76.

5. *Zhou*, *Zhengxin*. On the Poincare mapping and periodic solutions of nonautonomous differential systems / Zhengxin Zhou // Commun. Pure Appl. Anal. – 2007. – Vol. 6, № 2. – P. 541–547.

6. *Zhang*, *Shanlin*. On the equivalence of the Abel equation / Shanlin Zhang, Zhengxin Zhou // Ann. Differ. Equations. – 2006. – Vol. 22, № 3. – P. 461–466.

7. *Zhou*, *Zhengxin*. Stability of differential systems / Zhengxin Zhou // Appl. Math., Ser. B (Engl. Ed.). – 2006. – Vol. 21, № 3. – P. 327–334.

8. *Zhou*, *Zhengxin*. On the reflective function of polynomial differential system / Zhengxin Zhou // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – Vol. 278, № 1. – C. 18–26.

9. *Zhou*, *Zhengxin*. The nonlinear reflective function of differential system / Zhengxin Zhou, Yuexin Yan // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. – 2003. – Vol. 53, № 6 (A). – C. 733–741.

10. *Мироненко*, *В.И.* Возмущения систем, не изменяющие временных симметрий и отображения Пуанкаре / В.И. Мироненко, В.В. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1347–1352.

11. *Mironenko*, *V.I.* How to construct equivalent differential systems / V.I. Mironenko, V.V. Mironenko // Applied Mathematic Letters. – 2009. – Vol. 22. – C. 1356–1359.

12. *Вареникова*, *Е.В*. Отражающая функция и решения двухточечных краевых задач для неавтономных двумерных дифференциальных систем / Е.В. Варенникова // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т.48, №1. – С. 143–147.

Поступила в редакцию 02.09.13.